

# EXAMEN MATHÉMATIQUES I 2023–2024

NOM :

PRÉNOM :

**Durée :** 90 minutes.

- Lisez attentivement les énoncés des problèmes.
- Les réponses sans développement et sans justification n'ont aucune valeur ; donnez vos résultats sous la forme la plus simple possible.
- Toute documentation autre que la table des séries de Taylor est exclue.
- Les machines à calculer, smartphones et ordinateurs ne sont pas admis.
- Les solutions de chaque problème doivent être présentées sur des feuilles différentes.
- Soignez votre rédaction et expliquez clairement et précisément votre raisonnement ; ils font partie des critères d'évaluation de vos réponses.

**L'énoncé est à rendre obligatoirement avec votre copie.**

## Problème 1 (8 points)

Calculer les dérivées des fonctions ci-dessous.

a)  $f(x) = \ln\left(\frac{1 + \sin(x)}{\cos(x)}\right)$       b)  $g(x) = \frac{x^3}{9}(3\ln(x) - 1)$       c)  $h(x) = \sqrt[3]{x + \sqrt{2x}}$

## Problème 2 (7 points) **A REFAIRE**

a) Calculer, si elle existe, la limite

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (2x - \pi) \cdot \tan(x)$$

b) En utilisant les développements limités, calculer la valeur de la limite

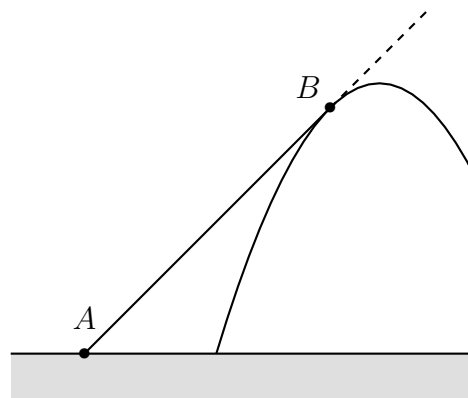
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \sin(x) - \arcsin(x)}{\arctan(x^5)}$$

**Problème 3** (7 points) **A REFAIRE**

Comme illustré dans la figure de droite, un observateur est situé au point  $A(-4, 0)$  et observe une colline dont la forme est donnée par la parabole d'équation  $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{7}{2}$ .

Déterminer les coordonnées du plus haut point  $B$  de la parabole visible depuis  $A$ .

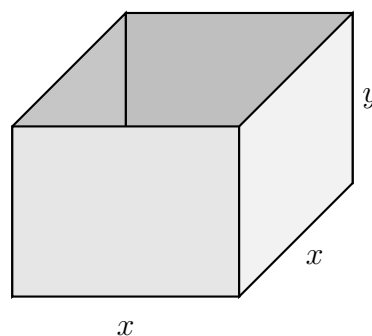
**Indication** : reformuler le problème en terme de droite tangente à un graphe.



**Problème 4** (10 points) **A REFAIRE**

On considère une boîte de base carrée de volume  $V$  fixé, sans couvercle, comme illustré dans la figure ci-contre.

Quelles doivent être les dimensions  $x$  et  $y$  de la boîte pour minimiser la surface de celle-ci ?



**Démarche à suivre pour résoudre ce problème :**

1. Identifier et définir précisément les variables de décision.
2. Exprimer l'objectif (la quantité à optimiser) comme une fonction des variables de décision.
3. Établir la relation liant les variables de décision.
4. Formuler l'objectif comme une fonction d'une seule variable de décision.
5. Déterminer ses extremums.
6. Présenter la solution.

**Problème 5** (7 points) **A REFAIRE**

Considérons la matrice carrée

$$A = \begin{bmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{bmatrix}$$

où  $a, b, c$  et  $d$  sont des nombres réels non tous nuls.

- a) Calculer la matrice  $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ .
  - b) Déduire de a) la matrice inverse  $\mathbf{A}^{-1}$  de  $\mathbf{A}$ .
  - c) Déduire de a) le déterminant  $|\mathbf{A}|$  de  $\mathbf{A}$ .
- 

**Problème 6** (11 points)

Considérons le déterminant

$$\begin{vmatrix} 2-t & 1 & -1 \\ 1 & 3-t & 2 \\ -1 & 2 & 3-t \end{vmatrix}$$

où  $t$  est un paramètre réel.

- a) Calculer la valeur du déterminant en précisant clairement votre démarche et vos calculs.
- b) Pour quelles valeurs de  $t$  le système

$$\begin{cases} (2-t)x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + (3-t)x_2 + 2x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + (3-t)x_3 = 2 \end{cases}$$

admet-il une seule et unique solution? (Il n'est pas nécessaire de la calculer).

- c) Résoudre le système donné en b) en posant  $t = 3$  et donner sa solution générale  $S$ . Préciser les étapes intermédiaires de votre résolution.
-